MINT Lernstudio Kamm

MATHEMATIK | IN DEPTH | KLASSE 9 · POTENZEN UND WURZELN 2/2

Potenz- und Wurzelgleichungen

Gerade und ungerade Exponenten, Scheinlösungen und die Probe

Video auf YouTube

Spickzettel · S. 2

Aufgaben · S. 2

Lösungen · S. 4

Zum Austeilen ohne Lösungen: vor Seite 4 aufhören.

Bildungsplan Baden-Württemberg: 3.3.1 Leitidee Zahl – Variable – Operation (Klassen 9/10)

© Felix Kamm · mint-lernstudio.de · Lizenz CC BY-NC-SA 4.0: frei für Unterricht und Lernen, nicht kommerziell

Spickzettel: Potenz- und Wurzelgleichungen

Zwei goldene Regeln, ein Vier-Schritte-Plan

1 Potenzgleichungen $x^n = a$

Video 0:40

Erst die Potenz isolieren, dann die n-te Wurzel ziehen. Entscheidend ist, ob der Exponent gerade oder ungerade ist:

Exponent	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$	Beispiel	
gerade (2, 4, …)	zwei Lösungen $\pm\sqrt[n]{a}$	$x = 0$	keine Lösung	$x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$	1:22
ungerade (3, 5, …)	immer genau eine Lösung, das Vorzeichen bleibt			$x^3 = -8 \rightarrow x = -2$	2:25

Steht eine Klammer in der Potenz, z. B. $(x - 4)^4 = 81$, behandelst du die Klammer wie eine Variable und löst beide Fälle einzeln zu Ende. Video 2:48

2 Wurzelgleichungen: der Vier-Schritte-Plan

Video 3:52

> **MERKE**
>
> **1.** Wurzel isolieren **2.** beide Seiten quadrieren **3.** Gleichung lösen **4. Probe** in der Ausgangsgleichung

Beim Quadrieren können **Scheinlösungen** entstehen, also Zahlen, die die Ausgangsgleichung nicht erfüllen. Deshalb gehört die Probe immer dazu. Video 4:13

Beispiel $\sqrt{(x + 2)} = x$: quadrieren ergibt $x + 2 = x^2$, also $x^2 - x - 2 = 0$ mit $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Probe: $x = 2$ passt ($\sqrt{4} = 2$). Bei $x = -1$ steht links $\sqrt{1} = 1$, rechts -1. Das ist eine Scheinlösung. $L = \{2\}$.

> **DIE ZWEI FEHLER, DIE DIE NOTE 1 KOSTEN**
>
> ✗ Bei geradem Exponenten nur die positive Lösung angegeben: $x^2 = 25$ hat **zwei** Lösungen.
>
> ✗ Bei Wurzelgleichungen die Probe vergessen und die Scheinlösung stehen lassen.
>
> ✗ Außerdem häufig: quadriert, bevor die Wurzel allein steht.

Übungsaufgaben: Bestimme die Lösungsmenge

19 Aufgaben in zwei Bereichen

AFB I wiedergeben · AFB II anwenden · AFB III übertragen und beurteilen. Erst selbst lösen, dann nachsehen.

© Felix Kamm · mint-lernstudio.de · Lizenz CC BY-NC-SA 4.0: frei für Unterricht und Lernen, nicht kommerziell

Bereich 1: Potenzgleichungen

AFB I Leicht	AFB II Mittel	AFB III Schwer
a) $x^3 = 64$	e) $\frac{1}{3} \cdot x^4 = 27$	i) $\frac{1}{2} \cdot (x + 5)^3 = 32$
b) $x^2 = 121$	f) $2x^3 + 15 = -39$	j) $2 \cdot (3x - 4)^4 - 10 = 152$
c) $4x^2 = 100$	g) $5x^2 - 120 = 5$	k) $x^2 = -49$
d) $x^5 = -32$	h) $(x - 1)^2 = 81$	

Bereich 2: Wurzelgleichungen

AFB I Leicht	AFB II Mittel	AFB III Schwer (Scheinlösung möglich)
l) $\sqrt{x} = 15$	o) $\sqrt{(5x - 4)} = 6$	r) $\sqrt{(3x + 7)} = x + 1$
m) $\sqrt[3]{x} = 5$	p) $3 \cdot \sqrt{x} - 2 = 13$	s) $\sqrt{(x + 7)} = x - 5$
n) $\sqrt{(x + 3)} = 4$	q) $\sqrt{x} + 5 = 2$	

SELBSTCHECK: ICH KANN …

- ☐ an der Gleichung ablesen, ob es keine, eine oder zwei Lösungen gibt.
- ☐ Gleichungen mit Klammer in der Potenz in zwei Fälle aufteilen.
- ☐ Wurzelgleichungen mit dem Vier-Schritte-Plan lösen.
- ☐ Scheinlösungen mit der Probe erkennen.

© Felix Kamm · mint-lernstudio.de · Lizenz CC BY-NC-SA 4.0: frei für Unterricht und Lernen, nicht kommerziell

Lösungen

Mit Zwischenschritten

a) $x = \sqrt[3]{64} = 4$, $L = \{4\}$ **b)** Exponent gerade: $x = \pm 11$, $L = \{-11; 11\}$ **c)** $x^2 = 25$, $L = \{-5; 5\}$ **d)** $x = \sqrt[5]{(-32)} = -2$, $L = \{-2\}$

e) $x^4 = 81$, $L = \{-3; 3\}$ **f)** $2x^3 = -54 \rightarrow x^3 = -27$, $L = \{-3\}$ **g)** $5x^2 = 125 \rightarrow x^2 = 25$, $L = \{-5; 5\}$ **h)** $x - 1 = \pm 9$: $x = 10$ oder $x = -8$, $L = \{-8; 10\}$

i) $(x + 5)^3 = 64 \rightarrow x + 5 = 4$, $L = \{-1\}$ **j)** $(3x - 4)^4 = 81 \rightarrow 3x - 4 = \pm 3$: $x = 7/3$ oder $x = 1/3$, $L = \{1/3; 7/3\}$ **k)** Ein Quadrat ist nie negativ, $L = \{\ \}$

l) $x = 15^2 = 225$, Probe $\sqrt{225} = 15$ ✓, $L = \{225\}$ **m)** $x = 5^3 = 125$, $L = \{125\}$ **n)** $x + 3 = 16 \rightarrow x = 13$, Probe $\sqrt{16} = 4$ ✓, $L = \{13\}$

o) $5x - 4 = 36 \rightarrow x = 8$, Probe $\sqrt{36} = 6$ ✓, $L = \{8\}$ **p)** $3\sqrt{x} = 15 \rightarrow \sqrt{x} = 5 \rightarrow x = 25$, Probe $3 \cdot 5 - 2 = 13$ ✓, $L = \{25\}$ **q)** $\sqrt{x} = -3$: Eine Quadratwurzel ist nie negativ, $L = \{\ \}$

r) $3x + 7 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Probe $x = 3$: $\sqrt{16} = 4 = 3 + 1$ ✓. Probe $x = -2$: $\sqrt{1} = 1$, rechts -1 ✗, Scheinlösung. **L = {3}**

s) $x + 7 = (x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \rightarrow x_1 = 9$, $x_2 = 2$. Probe $x = 9$: $\sqrt{16} = 4 = 9 - 5$ ✓. Probe $x = 2$: $\sqrt{9} = 3$, rechts -3 ✗, Scheinlösung. **L = {9}**

Grundlagen fehlen? Alle Rechenregeln stehen im Blatt „Potenzgesetze“.

Mehr dazu, alle Videos und alle Blätter: mint-lernstudio.de/beitraege/potenz-und-wurzelgleichungen

© Felix Kamm · mint-lernstudio.de · Lizenz CC BY-NC-SA 4.0: frei für Unterricht und Lernen, nicht kommerziell